

Przypomnienie (Długość łuku krzywej płaskiej.)

Długość s łuku AB krzywej płaskiej wyraża się formułą:

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{|x'(t)|^2+|y'(t)|^2}\,dt \qquad (1)$$

gdzie: t jest parametrem używanym do wyrażenia aktualnych współrzędnych x, y $(t_2>t_1)$.

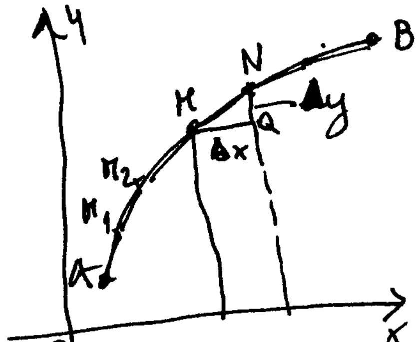
Jeśli parametr nie został dobrany, formuła (1) jest podana w wygodniejszej postaci jako:

$$s=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{dx^2+dy^2} \qquad (2)$$

Określenia (A) i (B) oznaczają, że dla granic całkowania wzięliśmy te wartości parametru, które odpowiadają końcom łuku AB.

W szczególności jest często wygodnie przyjąć jako parametr wartość x. Wtedy otrzymujemy

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (3)$$



rys. 1

Cięciwa łącząca punkty M i N może być obliczona z tw. Pitagorasa jako:

$$MN=\sqrt{MQ^2+QN^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\approx\sqrt{dx^2+dy^2}$$

Zatem łuk $\overset{\frown}{MN}\approx\sqrt{dx^2+dy^2}$

Przykład 1. Znaleźć długość łuku gałęzi cykloidy zadanej równaniami parametrycznymi $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$

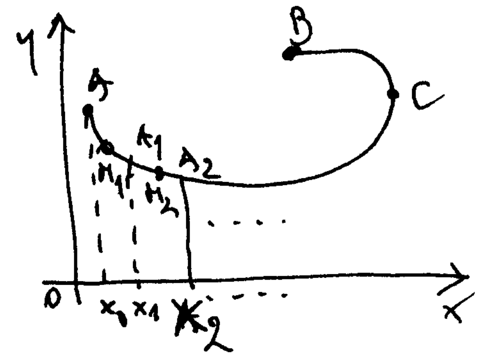
Rozwiązanie

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=a\sqrt{2(1-\cos t)}=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

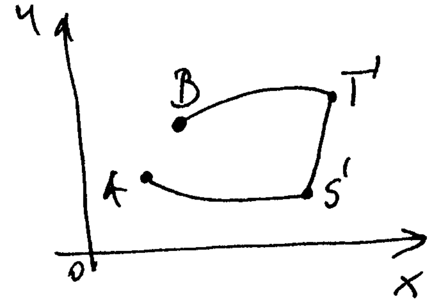
$$s=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\,dt=8a$$

Całka krzywoliniowa (wzdłuż łuku krzywej na płaszczyźnie lub w przestrzeni)

Niech $P(x,y)$ będzie funkcją ciągłą w pewnym obszarze leżącym w płaszczyźnie XY. Wybierzmy w tym obszarze pewną krzywą z punktem początkowym A i końcowym B. (Punkty A i B mogą się też pokrywać.)



rys.2



rys.3.

Mówiąc o krzywej zakładamy, że krzywa ta (AB) ma zmieniającą się w sposób ciągły styczną (z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których styczna zmienia się skokowo (punkty S' i T' rys 3))

Dzielimy AB na n części punktami $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ ($A_0 = A$, $A_n = B$).

Wybieramy na każdym łuku $A_k A_{k+1}$ punkt $M_k(x_k, y_k)$ i tworzymy sumę

$$S_n = P(x_0,y_0)\Delta x_0 + P(x_1,y_1)\Delta x_1 + \dots + P(x_n,y_n)\Delta x_n \qquad (4)$$

gdzie: Δx_i jest przyrostem zmiennej x odpowiadającym ruchowi punktu z A_{i-1} do A_i (Te przyrosty są dodatnie w części krzywej od A do C i ujemne w części krzywej od C do B)

<u>Twierdzenie</u>. Jeśli n rośnie do nieskończoności a największa co do bezwzgl. wartości wartość $|\Delta x_i|$ zmierza do 0 to suma (4) zmierza do granicy, która jest niezależna ani od podziału krzywej AB ani od wyboru punktów M_k z poszczególnych przedziałów.

<u>Definicja</u>. Granica, do której zmierza suma S_n jest nazywana całką krzywoliniową wyrażenia $P(x,y)dx$ wzdłuż krzywej AB.

<u>Oznaczenie</u>

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx \qquad (5)$$

Jeśli dana jest funkcja $Q(x,y)$ wzdłuż tej samej krzywej, to

(6) $\int_{AB} Q(x,y)\,dy$ definiujemy analogicznie.

Definiuje się też $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (7)

Całki (5) i (6) są szczególnymi przypadkami całki (7). ((5) dla $Q=0$, oraz (6) dla $P=0$)

Całkowicie analogicznie definiuje się całkę

$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y)dz$ wzdłuż krzywej AB w

przestrzeni trójwymiarowej.

Uwaga: a) Jeśli punkty A i B są różne, to

$$\int_{BA} Pdx + Qdy = - \int_{AB} Pdx + Qdy$$

$$\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz.$$

b) Jeśli punkty A i B są tym samym punktem, to krzywa jest zamknięta. Wtedy:

- jeśli jest to krzywa w płaszczyźnie XY, to piszemy

$\int_{+K} Pdx + Qdy$ co oznacza, że przebieg po krzywej odbywa się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

Piszemy $\int_{-K} Pdx + Qdy$ gdy jest odwrotnie.

- jeśli K jest krzywą przestrzenną (zamkniętą), to używamy punktów pośrednich np ACB lub BCA.

c) Całka krzywoliniowa jest uogólnieniem zwykłej całki i ma takie same własności.

Jeśli ścieżka całkowania AB jest przedziałem (a, b) na osi OX, to całka krzywoliniowa $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ zmienia się w zwykłą całkę $\int_a^b P(x,y)dx$

Interpretacja mechaniczna całki krzywoliniowej

Niech punkt M o masie m porusza się wzdłuż łuku AB w polu siły. Niech X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z) będą składowymi wektora potencjału w punkcie M(x, y, z), to znaczy wektora siły F działającej na punkt (x, y, z) o masie jednostkowej.

Wtedy praca wykonana przez tę siłę działającą na punkt (4)
M wyraża się całką krzywoliniową.

$$\int_{AB} m(Xdx + Ydy + Zdz)$$

Obliczanie całki krzywoliniowej

Żeby obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (8)
możemy przedstawić krzywą AB w postaci parametrycznej

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (9)$$

Podstawiając (9) do (8) otrzymamy całkę

$$\int_{t_A}^{t_B} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}dt,$$

która jest równa całce krzywoliniowej (8).

Jeśli równanie krzywej, po której całkujemy dane jest w postaci jawnej (nie parametrycznej), $y = \varphi(x)$, i jeśli a i b są odciętymi punktów A i B krzywej, przy czym $a < b$, to w przypadku płaskiej krzywej mamy:

$$\int_{(k)} f(x,y)ds = \int_a^b f[(x, \varphi(x)]\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}dx$$

a w przypadku krzywej przestrzennej opisanej równaniami związkami $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ mamy:

$$\int_{(k)} f(x,y,z)ds = \int_a^b f[(x, \varphi(x), \psi(x)]\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(x)]^2}$$

Zastosowania

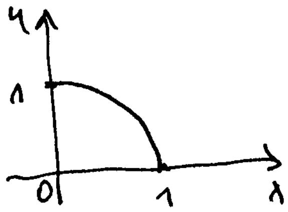
Długość odcinka krzywoliniowego K: $L(k) = \int_{(k)} ds$

Masa niejednorodnego odcinka krzywoliniowego K, gdy δ jest zmienną gęstością liniową, przy czym $\delta = f(x,y)$ dla krzywej płaskiej i $\delta = f(x,y,z)$ dla krzywej przestrzennej:

$$M(k) = \int_{(k)} \delta ds$$

Przykłady całek krzywoliniowych.

Przykład 1 Obliczyć pole powierzchni walcowej o wysokości h nad krzywą będącą $1/4$ okręgu $x^2+y^2=1$ w pierwszej ćwiartce.

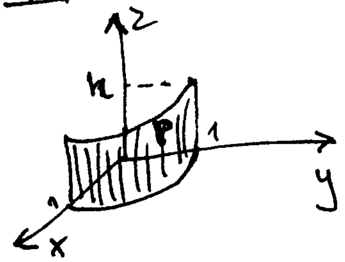


Rys1

Parametryzujemy tą krzywą opisaną równaniem

$$\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases} \quad t\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right] \qquad (1)$$

Rysunek 2 przedstawia pole powierzchni walcowej o którą chodzi w przykładzie. Pole to obliczymy jako całkę krzywoliniową wzdłuż linii (1) z funkcji stałej $f(x,y)=h$



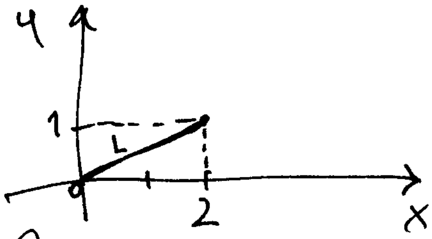
Rys.2

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}} h\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt =$$

$$= h\cdot t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot h$$

Uwaga. Cała powierzchnia boczna walca jest równa $2\pi r h$ ale u nas $r=1$. Więc $\frac{1}{4}$ całej powierzchni to $\frac{2\pi h}{4}=\frac{\pi}{2}\cdot h$.

Przykład 2. Obliczyć długość krzywej o równaniu $y=\frac{1}{2}x$ w przedziale $x\in[0,2]$.



Rys 3

Tu wygodnie jest przyjąć parametryzację przyjmując $x(t)=t$ $y(t)=\frac{1}{2}t$ $x\in[0,2]$.

Mamy wtedy $L=\int_0^2\sqrt{(x'(t))^2+y'(t)}\,dt =$

$$=\int_0^2\sqrt{1^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{1+\tfrac{1}{4}}\,dt=\int_0^2\sqrt{\tfrac{5}{4}}\,dt=$$

$$=\frac{\sqrt5}{2}t\Big|_0^2=\frac{\sqrt5}{2}\cdot 2-\frac{\sqrt5}{2}\cdot 0=\sqrt5$$

Uwaga. Z tw. Pitagorasa z rys.3 mamy

$L=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt5$

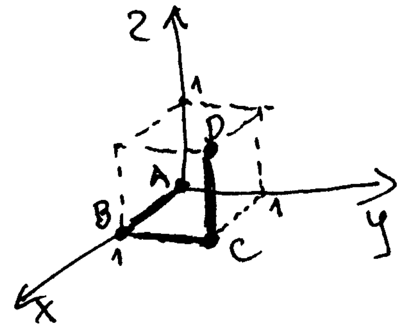
Przykład 3 Obliczyć całkę krzywoliniową daną równaniem parametrycznym.

$\int_K y\,dx+z\,dy+x\,dz$, gdzie K jest łamaną $ABCD$ zaś $A=(0,0,0)$ $B=(1,0,0)$, $C=(1,1,0)$ a $D=(1,1,1)$

Piszemy równania parametryczne odcinków łamanej

$$AB: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad BC: \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

$$CD: \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 1 \\ z(t) = t \end{cases} \quad t \in [0,1]$$



Rys. 4

Obliczamy poszczególne całki krzywoliniowe wzdłuż każdego z odcinków:

Dla łuku AB mamy: $x'(t) = 1$, $y'(t) = 0$, $z'(t) = 0$

Zatem

$$\int_{AB} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 (0\cdot 1 + 0\cdot 0 + t\cdot 0)\,dt = 0$$

Dla łuku BC mamy: $x'(t) = 0$, $y'(t) = 1$, $z'(t) = 0$, wtedy

$$\int_{BC} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 (t\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0)\,dt = 0$$

Dla łuku CD mamy: $x'(t) = 0$, $y'(t) = 0$, $z'(t) = 1$ Otrzymujemy

$$\int_{CD} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 (1\cdot 0 + t\cdot 0 + 1\cdot 1)\,dt = \int_0^1 1\,dt = t\Big|_0^1 = 1$$

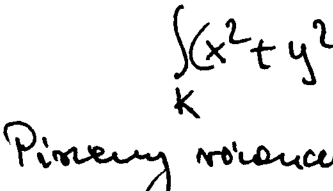
Szukana całka jest sumą wszystkich całek, zatem

$$\int_K y\,dx + z\,dy + x\,dz = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Przykład 4 Obliczyć całkę krzywoliniową daną równaniem parametrycznym

$\int_K (x^2 + y^2)\,dl$, gdzie K jest odcinkiem AB a $A = (2,1)$, $B = (3,2)$

Piszemy równania parametryczne odcinka AB. $AB: \begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = 1 + t \end{cases} \quad t \in [0,1]$



Rys 5

$x'(t) = 1$, $y'(t) = 1$ Zatem

$$\int_K (x^2+y^2)\,dl = \int_0^1 \left((2+t)^2 + (1+t)^2\right)\cdot\sqrt{1^2+1^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 (2t^2 + 6t + 5)\,dt = \sqrt{2}\left(\tfrac{2}{3}t^3 + 3t^2 + 5t\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2}\left(\tfrac{2}{3} + 3 + 5\right) =$$

$$= 8\tfrac{2}{3}\cdot\sqrt{2}.$$

Zadania – całki krzywoliniowe

Zad 1 Obliczyć całkę $\int_K xyz\,dl$ gdzie K: $x(t)=e^t$, $y(t)=e^{-t}$, $z(t)=\sqrt{2}t$
zaś $t\in[0,1]$

Rozw.

$$\int_K xyz\,dl = \int_0^1 e^t\cdot e^{-t}\cdot\sqrt{2}t\cdot\sqrt{(e^t)^2+(-e^{-t})^2+(\sqrt{2})^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2}\,t\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{2}t\cdot(e^t+e^{-t})\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\left(\int_0^1 te^t\,dt + \int_0^1 te^{-t}\,dt\right) =$$

Obie całki (jako nieoznaczone) obliczamy przez części, skąd

$$\int te^t = (t-1)e^t \quad ; \quad \int te^{-t}dt = -(t+1)e^{-t}$$

Zatem $$\int_K xyz\,dl = \sqrt{2}\left[(t-1)e^t - (t+1)e^{-t}\right]\Big|_0^1 = \sqrt{2}\left[(0-2e^{-1})-(1-1)\right] =$$

$$= 2\sqrt{2}(1-e^{-1})$$

Zad 2. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_K (x^2+y^2+z^2)\,dl$, gdzie K dana jest parametryzacją: $x(t)=4\sin t$, $y(t)=4\cos t$, $z(t)=3t$, $t\in[0,2\pi]$

Rozw. Dla parametryzacji krzywej K obliczamy pochodne $x'(t)=4\cos t$, $y'(t)=-4\sin t$, $z'(t)=3$. Podstawiając do odpowiedniego wzoru oraz korzystając z $\sin^2t+\cos^2t=1$ otrzymamy

$$\int_K(x^2+y^2+z^2)\,dl = \int_0^{2\pi}\left((4\sin t)^2+(4\cos t)^2+(3t)^2\right)\sqrt{(4\cos t)^2+(-4\sin t)^2+3^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(16+9t^2)\cdot\sqrt{16+9}\,dt = 5(16t+3t^3)\Big|_0^{2\pi} = 40\pi(3\pi^2-4)$$

Modyfikacja $t\in[0,1]$

Wtedy: $5(16t+3t^3)\Big|_0^1 = 5\cdot 19 = 95$

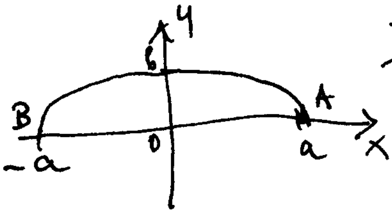
Zad 3. Obliczyć całkę $I=\int_K (x-y)\,dx+(x+y)\,dy$ gdzie K jest łukiem

a) elipsy $x(t)=a\cos t$, $y(t)=b\sin t$, $t\in[0,\pi]$

b) $K=AB$ jest odcinkiem $A=(a,0)$, $B=(-a,0)$

Rozwiązanie

a) K jest łukiem elipsy leżącym w górnej półpłaszczyźnie (rys.)



$$I = \int_K (x-y)dx + (x+y)dy = \int_0^{\pi} [(a\cos t - b\sin t)\cdot(-a\sin t) +$$
$$(a\cos t + b\sin t)\cdot b\cos t]dt =$$

rys. 1

$$= \int_0^{\pi} [ab(\sin^2 t + \cos^2 t) + (b^2-a^2)\sin t\cos t]dt =$$
$$= \int_0^{\pi} ab\,dt + (b^2-a^2)\cdot\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt = \pi ab - \left[(b^2-a^2)\cdot\frac{-\cos^2 t}{2}\right]_0^{\pi} = \pi ab$$

b) Odcinek o początku w B i końcu w A zawarty jest w osi Ox czyli w prostej $y=0$. Ma zatem parametryzację $x(t)=t$, $y(t)=0$ a $t\in[-1,1]$. Łatwo sprawdzić, że dla $t=-1$ otrzymujemy punkt B a dla $t=1$ otrzymujemy punkt A. Do policzenia całki potrzebujemy jednak parametryzacji odcinka AB a nie BA. Powyższa napisana parametryzacja dotyczy więc krzywej $-K$. Z własności całki krzywoliniowej wiemy, że $\int_K (x-y)dx + (x+y)dy = -\int_{-K}(x-y)dx+(x+y)dy$

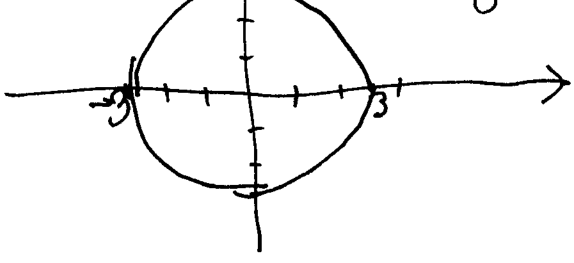
Zatem

$$I = -\int_{-K}(x-y)dx+(x+y)dy = -\int_{-1}^{1}[(t-0)\cdot 1 + (t+0)\cdot 0]dt = \int_{-1}^{1} t\,dt = -\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = 0$$

Zad. 4 Obliczyć całkę $\int_K -y\,dx + x\,dy + 2\,dz$, gdzie K: $x(t)=3\cos t$, $y(t)=3\sin t$, $z(t)=2t$, $t\in[0,2\pi]$

Rozwiązanie

$$\int_K -y\,dx + x\,dy + 2\,dz = \int_0^{2\pi}[-3\sin t\cdot(-3\sin t) + 3\cos t\cdot 3\cos t + 2t\cdot 2]dt =$$
$$= \int_0^{2\pi}(9+4t)dt = (9+2t^2)\Big|_0^{2\pi} = 18\pi + 8\pi^2.$$



okrąg o środku w (0,0) i promieniu 3

Krzywa K:

Spirala

Zad 5 Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_K \frac{1}{x-y}\,dl$ gdzie K jest odcinkiem prostej $y=\frac{1}{2}x-2$ dla $x\in[0,4]$

Uwaga: Jeżeli równanie krzywej jest dane równaniem $y=y(x)$ dla $x\in[a,b]$, to

$$\boxed{\int_K f(x,y)\,dl=\int_a^b f(x,y(x))\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}$$

Rozwiązanie Obliczamy pochodną $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{2}x-2\right)'=\frac{1}{2}$. Korzystając z powyższego wzoru mamy:

$$\int_K \frac{1}{x-y}\,dl=\int_0^4 \frac{1}{x-\left(\frac{1}{2}x-2\right)}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4 \frac{1}{\frac{1}{2}x+2}\,dx=$$

$$=\sqrt{5}\left[\ln\left|\frac{1}{2}x+2\right|\right]_0^4=\sqrt{5}\cdot\ln 2.$$

Zad. 6 Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_K 2xy\,dx+x^2\,dy$, gdzie K jest łukiem paraboli $y=x^2$ dla $x\in[0,1]$.

Rozwiązanie Obliczamy pochodną $y'(x)=2x$.

Uwaga Jeżeli równanie krzywej jest postaci $y=y(x)$ dla $x\in[a,b]$, to

$$\boxed{\int_K P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_a^b\left[P(x,y(x))+Q(x,y(x))\cdot y'(x)\right]dx}$$

Mamy zatem

$$\int_K 2xy\,dx+x^2\cdot dy=\int_0^1\left(2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x\right)dx=\int_0^1 4x^3\,dx=4\left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=1$$